

## CONCURSO DE MATEMÁTICAS: ENCUENTROS UNO A UNO.

María de Jesús Figueroa Torres - Roberto Guadalupe Garrido Carmona

figamat2@gmail.com - gafimate@gmail.com

ENCCH. UNAM. México - ENCCH. UNAM. México

Núcleo temático 5: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Modalidad: CB

Nivel educativo: Bachillerato

Palabras clave: Concurso de matemáticas

### Resumen

*El concurso de Matemáticas se llevó a cabo con encuentros uno a uno. Anteriormente se elaboraba un examen de 7 problemas y los alumnos lo resolvían en equipos de forma colaborativa, al final el jurado determinaba los tres equipos que lograron los mejores resultados.*

*En una conferencia en las JAEM 2013 “Batallas Matemáticas” nos dimos cuenta que el trabajo en equipo podría valorarse de mejor manera al enfrentar a los alumnos, uno a uno, en la resolución de un problema, por lo que elaboramos una propuesta que se aplicó en 2015.*

*La propuesta inicia con un examen de opción múltiple para seleccionar 16 equipos. Los equipos contaron con 30 minutos para conocer 4 problemas, posteriormente se formaron 8 parejas de equipos y en las parejas dos alumnos resolvieron un problema en un tiempo máximo de 30 minutos, pasaron los 8 equipos con más puntos. Con un proceso similar se continuaron eliminando, hasta dejar a los 3 equipos ganadores.*

*Se observó tanto el trabajo colaborativo como el individual.*

*Presentaremos el diseño, los resultados de la participación de los alumnos, una reflexión de los aprendizajes logrados y las técnicas de estudio utilizadas.*

Desde hace 35 años se llevan acabo en el Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), que es uno de los dos bachilleratos de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), concursos de matemáticas. Nuestra participación inicia en el año 2000, cuando algunos alumnos llegan a la oficina de la Academia de Matemáticas preguntando por los registros al concurso Intra-CCH de Matemáticas, en ese año coordinaba la Academia y me di a la tarea de investigar sobre la convocatoria y los requerimientos para participar en el concurso.

Encontré que el concurso se llevaría a cabo en el CCH Oriente, uno de los cinco planteles del CCH, yo trabajo en el plantel sur, en dos modalidades: individual y por equipos. La etapa individual consta de dos pruebas: eliminatoria con un examen de 16 preguntas de opción múltiple y la final con un examen de 7 preguntas de respuesta abierta; y la de equipos con un solo examen de 7 preguntas de respuesta abierta.

Se llevan a cabo dos concursos al año: local en el primer semestre; y el Intra-CCH (entre los 5 planteles) en el segundo semestre. En la etapa individual participan los alumnos de todos los niveles del CCH con el mismo examen y posteriormente se dividen en los 3 niveles. En el examen de la eliminatoria individual se consideran 4 problemas de cada una de los siguientes temas: aritmética, álgebra, geometría euclidea y varios (juegos y combinatoria), 16 problemas en total y para la final individual se consideran 2 problemas de cada una de los tres primeros temas y 1 de varios, 7 problemas en total. Con sorpresa hemos visto que los resultados de los alumnos de los tres niveles son similares y en algunas ocasiones son mejores los del primer nivel (primer año escolar).

En la etapa de equipos participan equipos de 4 a 5 alumnos de cualquier nivel académico y el examen es de 7 problemas, similar al de la final individual, en este caso se le asigna un salón a cada equipo y pueden usar el pizarrón para resolver los problemas entre todos.

En los últimos años nos dejó de interesar la etapa en equipos, ya que observamos que en muchas ocasiones el equipo donde uno de sus integrantes ganaba la etapa individual también ganaba la etapa en equipos, aún cuando el resto de los integrantes obtenían una muy mala participación en la etapa individual, luego le estábamos dando un reconocimiento de primer lugar a unos alumnos con un desempeño en matemáticas que no correspondía con los objetivos del concurso, poniendo a otros alumnos, con un mejor desempeño, en desventaja.

En 2013, tuvimos la oportunidad de asistir a la ciudad de Palma de Mallorca y participar en las Jornadas Académicas de Educación Matemática (JAEM), en ese congreso escuchamos una conferencia titulada “Batallas Matemáticas”, en la conferencia la profesora comentaba que en su escuela se organizaba un concurso de matemáticas, donde los alumnos en equipos competían entre ellos en batallas de matemáticas, eliminándose unos a otros hasta obtener el equipo vencedor, campeón de la batalla académica. En las batallas se enfrentaban dos equipos, y un alumno del primer equipo seleccionaba un problema de un conjunto propuesto para la batalla, y un alumno del segundo equipo lo tenía que resolver en el pizarrón en

presencia de un jurado compuesto por varios profesores, mientras el alumno que lo propuso lo revisaba y al final trataba de mejorar el desarrollo y el resultado obtenido. Los puntos se asignaban en función del desarrollo y el resultado de la resolución del problema del primer alumno, y en la posibilidad de que el alumno que revisaba el problema pudiera mejorar el desarrollo o ampliar la solución. El proceso se tornaba muy interesante ya que permitía la discusión y el debate de los problemas, obteniendo los puntos el equipo del alumno que tenía la mejor participación. En un segundo momento un alumno del segundo equipo seleccionaba un problema y un alumno del primer equipo lo resolvía en el pizarrón, repitiendo el mismo proceso. Como lo comentó la ponente, las batallas se tornaban muy largas y complicadas. Teniendo como referencia las batallas matemáticas nos dimos a la tarea de diseñar una estrategia para la etapa en equipos de nuestro concurso de matemáticas. Teníamos que enfrentar a los alumnos uno a uno en la resolución de un problema pero simplificar el proceso ya que solo contábamos con tres sábados para su desarrollo.

Se considero la posibilidad de llevar a cabo el concurso de matemáticas, celebrado en los meses de octubre y noviembre de 2015, por medio de encuentros uno a uno.

El modelo consistió en convocar a los alumnos, en equipos de 4, a una eliminatoria de equipos, aplicándoles un examen de 16 preguntas de opción múltiple con la distribución habitual de temas, 4 de aritmética, 4 de álgebra, 4 de geometría y 4 de varios para seleccionar a los 16 equipos con los mejores resultados. Con los 16 equipos seleccionados se llevó a cabo la final primera etapa, para lo cual se formaron 2 grupos, los 8 de más alta puntuación (grupo A) y los 8 de más baja puntuación (grupo B), ordenándolos de la más alta calificación a la más baja calificación. Organizamos 8 encuentros, cada uno con un equipo del grupo A contra un equipo del grupo B, (A1, B8), (A2, B7), ..., (A8, B1), el de mayor calificación del grupo A contra el de menor calificación del grupo B, buscando que los equipos con buenos resultados no fueran eliminados en los primeros encuentros. Durante el encuentro los equipos contaron con 30 minutos para conocer el examen de 4 problemas de repuesta abierta, uno de cada tema, y generar estrategias para socializar las posibles soluciones. Posteriormente con cada pareja de equipos se formaron 4 parejas de alumnos y a cada pareja de alumnos se les asigno, de manera aleatoria, un problema del examen para resolverlo de forma individual en un tiempo máximo de 30 minutos, de tal manera que al final de los 30 minutos, cada equipo

había resuelto los 4 problemas del examen. De cada pareja de equipos pasó a la siguiente ronda el equipo con mayor puntuación en todo el examen.

En los concursos anteriores se daba a los equipos hasta 4 horas para resolver el examen de 7 problemas de respuesta abierta, por lo que consideramos que en 30 minutos no podían resolverlo, pero si podían generar estrategias para explorar en conjunto (trabajo colaborativo) los posibles caminos de solución, de tal manera que entre todos buscaran estrategias para resolverlos y en su momento aplicarlas a resolver el problema que les tocara en el sorteo (trabajo individual). Posteriormente comentaremos algunas estrategias que observamos durante el trabajo de los equipos.

Con los 8 equipos que pasaron a la segunda ronda (final segunda etapa) se formaron 2 grupos, los 4 de mayor puntuación (grupo C) y los 4 de menor puntuación (grupo D), organizándose 4 encuentros, (C1, D4), (C2, D3), (C3, D2) y (C4, D1), los equipos contaron con 30 minutos para conocer el examen de 4 problemas de repuesta abierta, uno de cada tema. Con cada pareja de equipos se formaron 4 parejas de alumnos y a cada pareja de alumnos se les asigno, de manera aleatoria, un problema del examen para resolverlo de forma individual en un tiempo máximo de 30 minutos, de tal manera que al final cada equipo había resuelto los 4 problemas del examen, pasó a la siguiente ronda el equipo con mayor puntuación en todo el examen.

En la última etapa (final tercera etapa) con los 4 equipos ganadores se formaron 2 encuentros (E1, F2) y (E2, F1) y con un proceso similar a los anteriores se determinaron los 3 equipos ganadores (primero, segundo y tercer lugar), en esta última ocasión no se eliminaron a dos y se efectuó la final por el primero y segundo lugar, debido a como se mencionó anteriormente se trato de llevar a cabo el concurso en tres sábados.

En el concurso de Matemáticas 2016 participaron 118 alumnos en la etapa individual y 36 equipos de 4 alumnos, en total participaron 202 alumnos, ya que unos participaron en ambas etapas.

Para preparar a los alumnos se dieron asesorías durante dos meses previos al concurso además de un curso para alumnos de resolución de problemas.

En la elaboración de los exámenes se utilizaron problemas de los calendarios matemáticos 2015 y 2016: Un reto diario, y los exámenes 2011 a 2014 de la primera etapa del Concurso

Metropolitano de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, que organiza la Sociedad Matemática Mexicana.

Una muestra de los problemas utilizados es:

Eliminatoria Individual

5./ ¿Cuánto vale la suma de los factores primos de  $2^{16} - 1$ ?

- a) 281                      b) 282                      c) 283                      d) 284                      e) 285

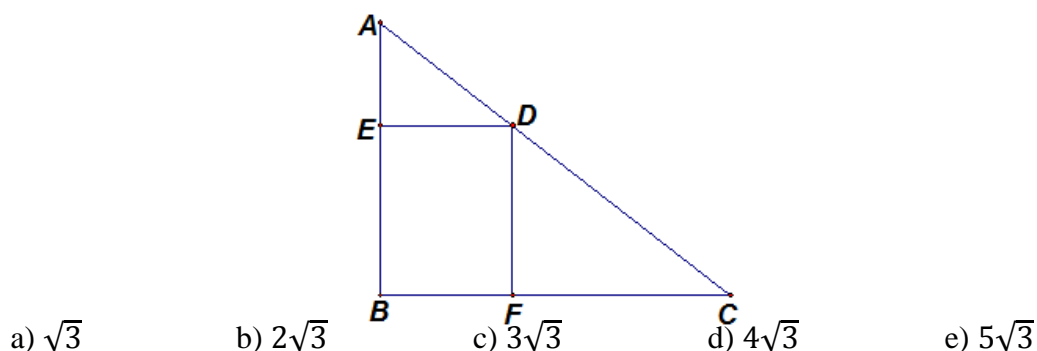
7./ ¿Cuántas tripletas de números naturales satisfacen las siguientes ecuaciones?

$$xyz = 4104$$

$$x+y+z = 77$$

- a) 0                      b) 1                      c) 2                      d) 3                      e) 4

11./ En la figura BD, DF y DE son alturas de los triángulos rectángulos ABC, BCD y BDA respectivamente. El ángulo  $BAC = 60^\circ$  y  $AC=8$ , ¿cuánto mide EF?

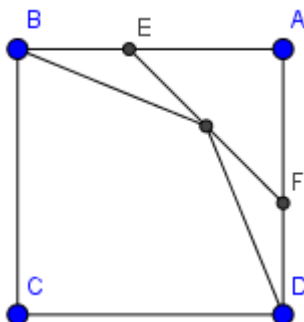


Final Equipos (Primer Encuentro)

1./ Una sucesión inicia con el número 2016 y el siguiente número es la suma de los cuadrados de los dígitos del número anterior. Los primeros 4 términos de la sucesión son 2016, 41, 17, 50, ... ¿Cuál número se encuentra en el término 2016?

2./ Para que valor de  $x$  se cumple que  $2(2^{2x}) = 4^x + 64$ .

3./ Si los tres triángulos de la figura son isósceles y el área del triángulo EAF es 9, ¿cuánto vale el área del cuadrado ABCD?



Para el concurso de Matemáticas 2016 se convocó a los alumnos de todos los niveles de Bachillerato del CCH y como se dijo anteriormente participaron 202 alumnos, 118 en el concurso individual y 36 equipos de 4 alumnos cada uno en el concurso de equipos.

## CONCURSO DE MATEMÁTICAS 2016

### BASES

1. Podrán participar todos los alumnos inscritos en el nivel medio superior.



2. Los alumnos se agruparán por nivel académico:

Nivel I: alumnos de primer año de Bachillerato.

Nivel II: alumnos de segundo año de Bachillerato.

Nivel III: alumnos de tercer año de Bachillerato.

Equipos: 4 alumnos de cualquier año de Bachillerato.

Del trabajo en equipo (trabajo colaborativo) de los alumnos durante los encuentros, observamos algunas de las siguientes estrategias:

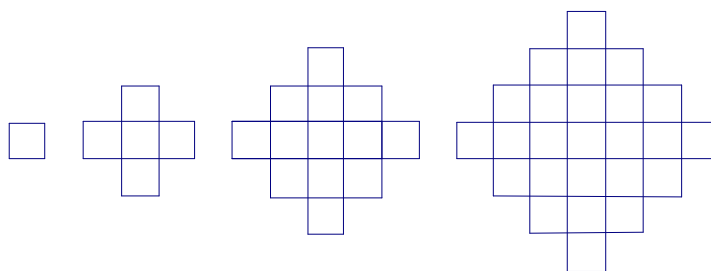
- Resolvieron entre todos cada uno de los problemas.
- Se repartieron los problemas y cada uno resolvió un problema.
- En la mitad del tiempo cada alumno trato de resolver un problema y en la parte complementaria, explicó a los demás la solución, en caso de haberlo terminado o el avance logrado.

Algunas muestras del trabajo de los alumnos son:

2. Un matrimonio tiene 7 hijos, 2 mujeres y 5 varones. Ana notó que este año el promedio de las edades de los varones es de 38 años y el de los siete hermanos es de 40. Además ella es 4 años mayor que María. ¿Qué edad tiene cada una de las hermanas?

En el trabajo de la alumna “ponente”, (figura 1 anexo) se observa que lo resuelve de manera aritmética mientras que el alumno “revisor” lo resuelve con una combinación de aritmética y álgebra, es decir está proponiendo una manera más general para resolver el problema.

5. Si las primeras cuatro figuras son las siguientes, ¿cuántos cuadritos hay en la figura 20?



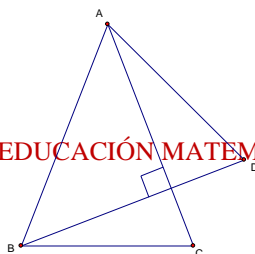
El alumno “ponente” lo resuelve por tanteo (figura 2 anexo), mientras que el alumno “revisor” propone un patrón (la suma de los cuadrados de las dos últimas diagonales) para obtener el número de cuadritos.

2. Si  $a, b, c$  y  $d$  son los números 1, 2, 3 y 4 en algún orden, determina si el siguiente número es par o impar (justifique su respuesta):

$$(a - 1)^2 + (b - 2)^2 + (c - 3)^2 + (d - 4)^2$$

El alumno “ponente” desarrolla toda una serie de posibilidades de sumas y productos (figuras 3 y 4 anexo), con sus propiedades, para determinar en qué casos son pares y en qué casos son impares, concluyendo de manera correcta que la suma en cuestión es par, mientras que la alumna “revisora” confunde la pregunta del problema y trata de mostrar la paridad de un quinto término  $(e - 5)^2$  dando un resultado incorrecto.

4. Los triángulos ABC y ABD son isósceles con  $AB=AC=BD$ .





Si BD es perpendicular a AC, entonces  $\angle BCA + \angle BDA$  es:

La alumna “ponente” adivina el resultado correcto sin justificar sus afirmaciones (figuras 5 y 6 anexo), como lo señala el alumno “revisor”, sin embargo este último tampoco justifica la congruencia de triángulos, lo cual es equivalente a utilizar sin justificar que los ángulos son de  $45^\circ$ , no obstante se observa un mayor manejo de la notación de las demostraciones en el alumno “revisor”.

Como se observa en los ejemplos presentados, se tiene una mejor valoración del trabajo de cada alumno en su participación dentro del equipo y el éxito o fracaso depende ampliamente de las estrategias utilizadas en el trabajo colaborativo de conocimiento de los problemas.

Durante los encuentros se observó mayor interés y participación de los alumnos, se generó interés por los resultados obtenidos y en general tanto los profesores del área de Matemáticas como los alumnos estaban atentos de los resultados y se mostraron más interesados en el desarrollo del concurso.

Consideramos que tenemos que mejorar el diseño del concurso “Encuentros uno a uno” pero pensamos que este trabajo permite generar interés en el aprendizaje de las matemáticas. Por otro lado, con los calendarios de matemáticas y con los exámenes de las primeras etapas de la Olimpiada de Matemáticas tenemos un extenso material para proponer a los alumnos de los Planteles del CCH, interesados en la resolución de problemas de matemáticas.





Bibliografía:

- Schoenfeld, A. (1989). *Explorations of students' mathematics beliefs and behavior*. Journal for Research in Mathematics Education, 20, 338-350.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. México. Princeton University Press.
- Ferreiro, R. (2014). *Nuevas Alternativas de Aprender y Enseñar*. México. Trillas.
- Alberro, A. y Bulajich, R. (2015 y 2016). *Calendario matemático: un reto diario*. México. Googol.
- Fernández, J. y Muñoz, J. (2011). “*Matemáticas: complementos de formación disciplinar*” *Aritmética y Álgebra*. España. No. 12 V. I. páginas 57-78. 2011.
- Pujol, R. “*Matemáticas: complementos de formación disciplinar*” *Geometría*. No. 12 V. I. páginas 117-144. 2011. España.